

$$\begin{aligned}
 33. f(x) &= 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max \\
 x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= -8 \\
 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10 \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).
 \end{aligned}$$

Найти наибольшее значение функции

$$F = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases}
 x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -8 \\
 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10
 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

Решение:

1. Свободные члены системы должны быть неотрицательными.

$$\begin{cases}
 -x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 8 \\
 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10
 \end{cases}$$

Умножили коэффициенты уравнения 1 на -1.

2. Каждое ограничение системы должно представлять собой уравнение.

Данное условие выполнено.

3. Нахождение начального базиса и значения функции F, которое соответствует найденному начальному базису.

Переменная называется базисной для данного уравнения, если она входит в данное уравнение с коэффициентом один и не входит в оставшиеся уравнения (при условии, что в правой части уравнения стоит положительное число).

Если в каждом уравнении присутствует базисная переменная, тогда говорят, что в системе присутствует базис.

Переменные, которые не являются базисными, называются свободными. (см. систему ниже)

Идея симплекс метода заключается в том, чтобы переходить от одного базиса к другому, получая значение функции, как минимум, не хуже имеющегося (каждому базису соответствует единственное значение функции).

Очевидно, количество всевозможных базисов для любой задачи число конечное (и не очень большое).

Следовательно, рано или поздно, ответ будет получен.

Как осуществляется переход от одного базиса к другому?

Запись решения удобнее вести в виде таблиц. Каждая строка эквивалентна уравнению системы. Выделенная строка состоит из коэффициентов функции (сравните сами). Это позволяет не переписывать переменные каждый раз, что существенно экономит время.

Если требуется найти F_{\max} (F_{\min}), в выделенной строке выбираем наибольший положительный (наименьший отрицательный) коэффициент. Это необходимо для того, чтобы получить значение функции, как минимум, не меньше (больше) имеющегося.

Выбран столбец.

Для положительных коэффициентов выбранного столбца считаем отношение и выбираем наименьшее значение. Это необходимо для того, чтобы после преобразования столбец свободных членов остался положительным.

Выбрана строка.

Следовательно, определен элемент, который будет базисным. Далее считаем.

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + R_1 = 8 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + R_2 = 10 \end{array} \right.$$

$R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$. Введенные переменные R_1, R_2 , называются искусственными переменными.

Без начального базиса невозможно начать решение. Поэтому воспользовались введением искусственных переменных, т.е. добавили искусственные переменные в те уравнения, где не было базисной переменной.

Придется решить вспомогательную задачу. Необходимо получить базис без искусственных переменных. Для этого введем в рассмотрение функцию W и будем искать ее наименьшее значение.

$$W = R_1 + R_2$$

$$W = (8 + x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4) + R_2 = 8 + x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 + R_2$$

$$W = 8 + x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 + (10 - 2x_2 - x_3 - 3x_4) = 18 + x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 7x_4$$

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. Функция W выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно.

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \Rightarrow W = 18$$

$$R_1 = 8 \quad R_2 = 10$$

Шаг №1

x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	св. член	Θ
-1	-4	5	4	1	0	8	$8 : 4 = 2$
0	2	1	3	0	1	10	$10 : 3 \approx 3,33$
1 2 -6 -7 0 0 W - 18							
-1/4	-1	5/4	1	1/4	0	2	
0	2	1	3	0	1	10	
1 2 -6 -7 0 0 W - 18							
-1/4	-1	5/4	1	1/4	0	2	
3/4	5	-11/4	0	-3/4	1	4	
-3/4 -5 11/4 0 7/4 0 W - 4							

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. Функция W выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно.

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad R_1 = 0 \quad R_2 = 0 & \Rightarrow W = 4 \\ x_4 = 2 \end{aligned}$$

Шаг №2

x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	св. член	Θ
-1/4	-1	5/4	1	1/4	0	2	
3/4	5	-11/4	0	-3/4	1	4	$4 : 5 \approx 0,80$
-3/4	-5	11/4	0	7/4	0	W - 4	
-1/4	-1	5/4	1	1/4	0	2	
3/20	1	-11/20	0	-3/20	1/5	4/5	
-3/4	-5	11/4	0	7/4	0	W - 4	
-1/10	0	7/10	1	1/10	1/5	14/5	
3/20	1	-11/20	0	-3/20	1/5	4/5	
0	0	0	0	1	1	W - 0	

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. Функция W выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно.

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad R_1 = 0 \quad R_2 = 0 & \Rightarrow W = 0 \\ x_2 = 4/5 \quad x_4 = 14/5 \end{aligned}$$

Получен базис без использования искусственных переменных. Что и требовалось.

Столбцы, соответствующие искусственным переменным, можно вычеркнуть.

В итоге, исходная система выглядит следующим образом.

$$\begin{cases} -1/10 x_1 + 7/10 x_3 + x_4 = 14/5 \\ 3/20 x_1 + x_2 - 11/20 x_3 = 4/5 \end{cases}$$

$$F = 5 x_1 + 2 x_2 - 3 x_3 + 4 x_4$$

$$F = 5 x_1 + 2 x_2 - 3 x_3 + 4 * (14/5 + 1/10 x_1 - 7/10 x_3) = 56/5 + 27/5 x_1 + 2 x_2 - 29/5 x_3$$

$$F = 56/5 + 27/5 x_1 + 2 * (4/5 - 3/20 x_1 + 11/20 x_3) - 29/5 x_3 = 64/5 + 51/10 x_1 - 47/10 x_3$$

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. Функция F выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно.

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_3 = 0 & \Rightarrow F = 64/5 \\ x_2 = 4/5 \quad x_4 = 14/5 \end{aligned}$$

Начальный базис найден и получено значение функции F соответствующее найденному базису.

4. Нахождение наибольшего значения функции F.

Шаг №1

x_1	x_2	x_3	x_4	св. член	Θ
-1/10	0	7/10	$\boxed{1}$	14/5	
$\boxed{3/20}$	$\boxed{1}$	-11/20	0	4/5	$4/5 : 3/20 \approx 5,33$
51/10	0	-47/10	0	F - 64/5	
-1/10	0	7/10	$\boxed{1}$	14/5	
$\boxed{1}$	20/3	-11/3	0	16/3	
51/10	0	-47/10	0	F - 64/5	
0	2/3	1/3	$\boxed{1}$	10/3	
$\boxed{1}$	20/3	-11/3	0	16/3	
0	-34	14	0	F - 40	

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)

Функция F выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно. (см. таблицу)

$$x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \\ x_1 = 16/3 \quad x_4 = 10/3 \Rightarrow F - 40 = 0 \Rightarrow F = 40$$

Шаг №2

x_1	x_2	x_3	x_4	св. член	Θ
0	2/3	$\boxed{1/3}$	$\boxed{1}$	10/3	$10/3 : 1/3 = 10$
$\boxed{1}$	20/3	-11/3	0	16/3	
0	-34	14	0	F - 40	
0	2	$\boxed{1}$	3	10	
$\boxed{1}$	20/3	-11/3	0	16/3	
0	-34	14	0	F - 40	
0	2	$\boxed{1}$	3	10	
$\boxed{1}$	14	0	11	42	
0	-62	0	-42	F - 180	

Приравниваем свободные переменные нулю, устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)

Функция F выражена через свободные переменные, следовательно, ее значение для данного решения можно найти мгновенно. (см. таблицу)

$$\begin{aligned} x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \\ x_1 = 42 \quad x_3 = 10 \end{aligned} \Rightarrow F - 180 = 0 \Rightarrow F = 180$$

Среди коэффициентов выделенной строки нет положительных. Следовательно, найдено наибольшее значение функции F.

Ответ:

$$x_1 = 42 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 10 \quad x_4 = 0$$

$$F_{\max} = 180$$